Towards Confluence of DPRSs by Critical Pairs

Johannes Niederhauser and Aart Middeldorp

University of Innsbruck

Outline

1. **Introduction**
2. **Deterministic Higher–Order Pattern Rewrite Systems**
3. **Critical Pairs**
4. **Conclusion**

Example

HRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{app}(\mathsf{abs}(\lambda x.F(x)), S) \to F(S) \qquad \mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(S, x)) \to S$$

Example

HRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{app}(\mathsf{abs}(\lambda x.F(x)), S) \to F(S) \qquad \mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(S, x)) \to S$$

Remarks

- HRSs à la Nipkow (LICS 1991)

Example

HRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{app}(\mathsf{abs}(\lambda x.F(x)),S) \to F(S) \qquad \mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(S,x)) \to S$$

Remarks

- HRSs à la Nipkow (LICS 1991)
- terms in $\beta\eta$-long normal form

Example

HRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{app}(\mathsf{abs}(\lambda x.F(x)), S) \to F(S) \qquad \mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(S, x)) \to S$$

- $\mathsf{app}(\mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(x, x)), \mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(x, x)))$

Remarks

- HRSs à la Nipkow (LICS 1991)
- terms in $\beta\eta$-long normal form

Example

HRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{app}(\mathsf{abs}(\lambda x.F(x)), S) \to F(S) \qquad \mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(S, x)) \to S$$

- $\mathsf{app}(\mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(x, x)), \mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(x, x)))$

Remarks

- HRSs à la Nipkow (LICS 1991)
- terms in $\beta\eta$-long normal form
- matching modulo $\beta\eta$

Example

HRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{app}(\mathsf{abs}(\lambda x.F(x)),S) \to F(S) \qquad \mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(S,x)) \to S$$

- $\mathsf{app}(\mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(x,x)),\mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(x,x)))$
- $\{F \mapsto \lambda z.\mathsf{app}(z,z), S \mapsto \mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(x,x))\}$

Remarks

- HRSs à la Nipkow (LICS 1991)
- terms in $\beta\eta$-long normal form
- matching modulo $\beta\eta$

Example

HRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{app}(\mathsf{abs}(\lambda x.F(x)), S) \to F(S) \qquad \mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(S, x)) \to S$$

- $\mathsf{app}(\mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(x,x)), \mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(x,x))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{app}(\mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(x,x)), \mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(x,x)))$
- $\{F \mapsto \lambda z.\mathsf{app}(z,z), S \mapsto \mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(x,x))\}$

Remarks

- HRSs à la Nipkow (LICS 1991)
- terms in $\beta\eta$-long normal form
- matching modulo $\beta\eta$

Example

HRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{app}(\mathsf{abs}(\lambda x. F(x)), S) \to F(S) \qquad \mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(S, x)) \to S$$

- $\mathsf{app}(\mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(x,x)), \mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(x,x))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{app}(\mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(x,x)), \mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(x,x)))$
- $\{F \mapsto \lambda z.\mathsf{app}(z,z), S \mapsto \mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(x,x))\}$

Remarks

- HRSs à la Nipkow (LICS 1991)
- terms in $\beta\eta$-long normal form
- matching modulo $\beta\eta$
- used in higher-order confluence analysis

Example

HRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{app}(\mathsf{abs}(\lambda x.F(x)), S) \to F(S) \qquad \mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(S, x)) \to S$$

- $\mathsf{app}(\mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(x,x)), \mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(x,x))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{app}(\mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(x,x)), \mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(x,x)))$
- $\{F \mapsto \lambda z.\mathsf{app}(z,z), S \mapsto \mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(x,x))\}$

Remarks

- HRSs à la Nipkow (LICS 1991)
- terms in $\beta\eta$-long normal form
- matching modulo $\beta\eta$
- used in higher-order confluence analysis
- critical pair lemma for special case where lhss are patterns

Example

HRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{app}(\mathsf{abs}(\lambda x.F(x)), S) \to F(S) \qquad \mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(S, x)) \to S$$

- $\mathsf{app}(\mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(x,x)), \mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(x,x))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{app}(\mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(x,x)), \mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(x,x)))$
- $\{F \mapsto \lambda z.\mathsf{app}(z,z), S \mapsto \mathsf{abs}(\lambda x.\mathsf{app}(x,x))\}$

Remarks

- HRSs à la Nipkow (LICS 1991)
- terms in $\beta\eta$-long normal form
- matching modulo $\beta\eta$
- used in higher-order confluence analysis
- critical pair lemma for special case where lhss are patterns
- **our goal:** extend this to deterministic higher–order patterns

Outline

Definition

- flattened representation of simple types

Definition

- flattened representation of simple types
- given set $\mathcal{S}$ of sorts, set of types is smallest set $\mathcal{T}$ such that
  1. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$
  2. if $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \mathcal{T}$ and $s \in \mathcal{S}$ then $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \to s \in \mathcal{T}$

Definition

- flattened representation of simple types
- given set $\mathcal{S}$ of sorts, set of types is smallest set $\mathcal{T}$ such that
  1. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$
  2. if $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \mathcal{T}$ and $s \in \mathcal{S}$ then $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \to s \in \mathcal{T}$
- $\beta\eta$–free formulation of terms in $\beta\eta$–long normal form

Definition

- flattened representation of simple types
- given set $\mathcal{S}$ of sorts, set of types is smallest set $\mathcal{T}$ such that
  1. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$
  2. if $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \mathcal{T}$ and $s \in \mathcal{S}$ then $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \to s \in \mathcal{T}$
- $\beta\eta$–free formulation of terms in $\beta\eta$–long normal form
- given sets $\mathcal{V}$ (infinite) and $\mathcal{F}$ of typed variables and function symbols, set $\mathrm{term}(\sigma)$ of terms of type σ is defined inductively

Definition

- flattened representation of simple types
- given set $\mathcal{S}$ of sorts, set of types is smallest set $\mathcal{T}$ such that
  1. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$
  2. if $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \mathcal{T}$ and $s \in \mathcal{S}$ then $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \to s \in \mathcal{T}$
- $\beta\eta$–free formulation of terms in $\beta\eta$–long normal form
- given sets $\mathcal{V}$ (infinite) and $\mathcal{F}$ of typed variables and function symbols, set $\mathsf{term}(\sigma)$ of terms of type σ is defined inductively:

$$\frac{h : (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \to s \in \mathcal{F} \cup \mathcal{V} \qquad t_1 \in \mathsf{term}(\sigma_1) \quad \cdots \quad t_n \in \mathsf{term}(\sigma_n)}{h(t_1, \dots, t_n) \in \mathsf{term}(s)}$$

Definition

- flattened representation of simple types
- given set $\mathcal{S}$ of sorts, set of types is smallest set $\mathcal{T}$ such that
  1. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$
  2. if $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \mathcal{T}$ and $s \in \mathcal{S}$ then $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \to s \in \mathcal{T}$
- $\beta\eta$–free formulation of terms in $\beta\eta$–long normal form
- given sets $\mathcal{V}$ (infinite) and $\mathcal{F}$ of typed variables and function symbols, set $\mathrm{term}(\sigma)$ of terms of type σ is defined inductively:

$$\frac{h : (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \to s \in \mathcal{F} \cup \mathcal{V} \qquad t_1 \in \mathrm{term}(\sigma_1) \quad \cdots \quad t_n \in \mathrm{term}(\sigma_n)}{h(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{term}(s)}$$

$$\frac{t \in \mathrm{term}(s) \qquad x_1 : \sigma_1 \in \mathcal{V} \quad \cdots \quad x_n : \sigma_n \in \mathcal{V}}{x_1 \ldots x_n.t \in \mathrm{term}((\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \to s)}$$

Definition (Miller 1991)

higher–order pattern is term in β–normal form such that arguments of free variables are η–equivalent to distinct bound variables

Definition (Miller 1991)

higher–order pattern is term in β–normal form such that arguments of free variables are η–equivalent to distinct bound variables

Example

$x.\mathsf{c}(x) \quad x.Z(\mathsf{c}(x), \mathsf{d}(x)) \quad x.Z(y.y) \quad Z(\mathsf{c}) \quad x.Z(y.x(y)) \quad x.Z(Z(x)) \quad x.\mathsf{c}(Z_1(x), Z_2(x))$

Definition (Miller 1991)

higher–order pattern is term in β–normal form such that arguments of free variables are η–equivalent to distinct bound variables

Example (higher–order patterns)

$x.\mathsf{c}(x)$ $\quad x.Z(\mathsf{c}(x),\mathsf{d}(x))$ $\quad x.Z(y.y)$ $\quad Z(\mathsf{c})$ $\quad x.Z(y.x(y))$ $\quad x.Z(Z(x))$ $\quad x.\mathsf{c}(Z_1(x),Z_2(x))$

Definition (Miller 1991)

higher–order pattern is term in β–normal form such that arguments of free variables are η–equivalent to distinct bound variables

Example (higher–order patterns)

$x.\mathsf{c}(x)$ $\quad x.Z(\mathsf{c}(x), \mathsf{d}(x))$ $\quad x.Z(y.y)$ $\quad Z(\mathsf{c})$ $\quad x.Z(y.x(y))$ $\quad x.Z(Z(x))$ $\quad x.\mathsf{c}(Z_1(x), Z_2(x))$

Definition (Yokoyama & Hu & Takeichi 2003)

deterministic higher–order pattern is term s such that

① $\varnothing \neq \mathrm{FV}(t_i) \subseteq \{y_1, \ldots, y_n\}$

② $t_i{\downarrow_\eta} \ntrianglelefteq t_j{\downarrow_\eta}$ whenever $i \neq j$

③ $t_i{\downarrow_\eta}$ is no lambda abstraction

for all abstracted subterms $y_1 \ldots y_n.x(t_1, \ldots, t_m)$ of s with $x \notin \{y_1, \ldots, y_n\}$ and $1 \leqslant i \leqslant m$

Definition (Miller 1991)

higher–order pattern is term in β–normal form such that arguments of free variables are η–equivalent to distinct bound variables

Example (deterministic higher–order patterns)

$x.\mathsf{c}(x)$ $x.Z(\mathsf{c}(x), \mathsf{d}(x))$ $x.Z(y.y)$ $Z(\mathsf{c})$ $x.Z(y.x(y))$ $x.Z(Z(x))$ $x.\mathsf{c}(Z_1(x), Z_2(x))$

Definition (Yokoyama & Hu & Takeichi 2003)

deterministic higher–order pattern is term s such that

① $\varnothing \neq \mathsf{FV}(t_i) \subseteq \{y_1, \ldots, y_n\}$

② $t_i{\downarrow_\eta} \ntrianglelefteq t_j{\downarrow_\eta}$ whenever $i \neq j$

③ $t_i{\downarrow_\eta}$ is no lambda abstraction

for all abstracted subterms $y_1 \ldots y_n.x(t_1, \ldots, t_m)$ of s with $x \notin \{y_1, \ldots, y_n\}$ and $1 \leqslant i \leqslant m$

Theorem (Miller 1991)

unification problem for higher−order patterns is decidable

Theorem (Miller 1991)

unification problem for higher−order patterns is decidable and unitary

Theorem (Miller 1991)

unification problem for higher–order patterns is decidable and unitary

Theorem (Yokoyama & Hu & Takeichi 2003)

matching problem for deterministic higher–order patterns is decidable and unitary

Theorem (Miller 1991)

unification problem for higher−order patterns is decidable and unitary

Theorem (Yokoyama & Hu & Takeichi 2003)

matching problem for deterministic higher−order patterns is decidable and unitary

Remarks

- deterministic higher−order patterns are useful for program transformation

Theorem (Miller 1991)

unification problem for higher−order patterns is decidable and unitary

Theorem (Yokoyama & Hu & Takeichi 2003)

matching problem for deterministic higher−order patterns is decidable and unitary

Remarks

- deterministic higher−order patterns are useful for program transformation
- unification problem for deterministic higher−order problems is not unitary

Example (Yokoyama & Hu & Takeichi 2003)

- $\mathsf{f} : \mathsf{a} \to \mathsf{a} \quad M, N : (\mathsf{a}, \mathsf{a}) \to \mathsf{a}$
- terms $x, y.M(\mathsf{f}(x), \mathsf{f}(y))$ and $x, y.\mathsf{f}(N(y, x))$

Example (Yokoyama & Hu & Takeichi 2003)

- $\mathsf{f} : \mathsf{a} \to \mathsf{a} \quad M, N : (\mathsf{a}, \mathsf{a}) \to \mathsf{a}$
- terms $x, y.M(\mathsf{f}(x), \mathsf{f}(y))$ and $x, y.\mathsf{f}(N(y, x))$ admit three (incomparable) unifiers:

  1. $\{M \mapsto z_1, z_2.z_1,\ N \mapsto z_1, z_2.z_2\}$

Example (Yokoyama & Hu & Takeichi 2003)

- $\mathsf{f} : \mathsf{a} \to \mathsf{a} \quad M, N : (\mathsf{a}, \mathsf{a}) \to \mathsf{a}$
- terms $x, y.M(\mathsf{f}(x), \mathsf{f}(y))$ and $x, y.\mathsf{f}(N(y, x))$ admit three (incomparable) unifiers:
  1. $\{M \mapsto z_1, z_2.z_1,\ N \mapsto z_1, z_2.z_2\}$
  2. $\{M \mapsto z_1, z_2.z_2,\ N \mapsto z_1, z_2.z_1\}$

Example (Yokoyama & Hu & Takeichi 2003)

- $\mathsf{f} : \mathsf{a} \to \mathsf{a} \quad M, N : (\mathsf{a}, \mathsf{a}) \to \mathsf{a}$
- terms $x, y.M(\mathsf{f}(x), \mathsf{f}(y))$ and $x, y.\mathsf{f}(N(y, x))$ admit three (incomparable) unifiers:
  1. $\{M \mapsto z_1, z_2.z_1,\ N \mapsto z_1, z_2.z_2\}$
  2. $\{M \mapsto z_1, z_2.z_2,\ N \mapsto z_1, z_2.z_1\}$
  3. $\{M \mapsto z_1, z_2.\mathsf{f}(Z(z_1, z_2)),\ N \mapsto z_1, z_2.Z(\mathsf{f}(z_2), \mathsf{f}(z_1))\}$

  with fresh variable $Z : (a, a) \to a$

Example (Yokoyama & Hu & Takeichi 2003)

- $\mathsf{f} : \mathsf{a} \to \mathsf{a} \quad M, N : (\mathsf{a}, \mathsf{a}) \to \mathsf{a}$
- terms $x, y.M(\mathsf{f}(x), \mathsf{f}(y))$ and $x, y.\mathsf{f}(N(y, x))$ admit three (incomparable) unifiers:
  1. $\{M \mapsto z_1, z_2.z_1,\ N \mapsto z_1, z_2.z_2\}$
  2. $\{M \mapsto z_1, z_2.z_2,\ N \mapsto z_1, z_2.z_1\}$
  3. $\{M \mapsto z_1, z_2.\mathsf{f}(Z(z_1, z_2)),\ N \mapsto z_1, z_2.Z(\mathsf{f}(z_2), \mathsf{f}(z_1))\}$

  with fresh variable $Z : (a, a) \to a$

Definitions

- deterministic higher–order pattern rewrite rule is rewrite rule whose left–hand side is deterministic higher–order pattern

Example (Yokoyama & Hu & Takeichi 2003)

- $\mathsf{f} : \mathsf{a} \to \mathsf{a} \quad M, N : (\mathsf{a}, \mathsf{a}) \to \mathsf{a}$
- terms $x, y.M(\mathsf{f}(x), \mathsf{f}(y))$ and $x, y.\mathsf{f}(N(y, x))$ admit three (incomparable) unifiers:
  1. $\{M \mapsto z_1, z_2.z_1,\ N \mapsto z_1, z_2.z_2\}$
  2. $\{M \mapsto z_1, z_2.z_2,\ N \mapsto z_1, z_2.z_1\}$
  3. $\{M \mapsto z_1, z_2.\mathsf{f}(Z(z_1, z_2)),\ N \mapsto z_1, z_2.Z(\mathsf{f}(z_2), \mathsf{f}(z_1))\}$

  with fresh variable $Z : (a, a) \to a$

Definitions

- deterministic higher–order pattern rewrite rule is rewrite rule whose left–hand side is deterministic higher–order pattern
- deterministic higher–order pattern rewrite system (DPRS) is set of deterministic higher–order pattern rewrite rules

Outline

1. Introduction
2. Deterministic Higher–Order Pattern Rewrite Systems
3. **Critical Pairs**
4. Conclusion

Example

DPRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{f}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{f}(x) \qquad \mathsf{h}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{h}(x) \qquad \mathsf{c}(y.Z(\mathsf{g}(y))) \to Z(\mathsf{d})$$

Example

DPRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{f}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{f}(x) \qquad \mathsf{h}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{h}(x) \qquad \mathsf{c}(y.Z(\mathsf{g}(y))) \to Z(\mathsf{d})$$

- $\mathsf{c} : (\mathsf{a} \to \mathsf{a}) \to \mathsf{a} \quad \mathsf{d} : \mathsf{a} \quad \mathsf{f}, \mathsf{g} : \mathsf{a} \to \mathsf{a} \quad \mathsf{h} : \mathsf{a} \to \mathsf{b}$

Example

DPRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{f}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{f}(x) \qquad \mathsf{h}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{h}(x) \qquad \mathsf{c}(y.Z(\mathsf{g}(y))) \to Z(\mathsf{d})$$

- $\mathsf{c} : (\mathsf{a} \to \mathsf{a}) \to \mathsf{a} \quad \mathsf{d} : \mathsf{a} \quad \mathsf{f}, \mathsf{g} : \mathsf{a} \to \mathsf{a} \quad \mathsf{h} : \mathsf{a} \to \mathsf{b}$
- $x : \mathsf{a} \quad Z : \mathsf{a} \to \mathsf{a}$

Example

DPRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{f}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{f}(x) \qquad \mathsf{h}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{h}(x) \qquad \mathsf{c}(y.Z(\mathsf{g}(y))) \to Z(\mathsf{d})$$

- $\mathsf{c} : (\mathsf{a} \to \mathsf{a}) \to \mathsf{a} \quad \mathsf{d} : \mathsf{a} \quad \mathsf{f}, \mathsf{g} : \mathsf{a} \to \mathsf{a} \quad \mathsf{h} : \mathsf{a} \to \mathsf{b}$
- $x : \mathsf{a} \quad Z : \mathsf{a} \to \mathsf{a}$
- local peak $\mathsf{c}(y.\mathsf{f}(y)) \leftarrow \mathsf{c}(y.\mathsf{f}(\mathsf{g}(y))) \to \mathsf{f}(\mathsf{d})$

Example

DPRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{f}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{f}(x) \qquad \mathsf{h}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{h}(x) \qquad \mathsf{c}(y.Z(\mathsf{g}(y))) \to Z(\mathsf{d})$$

- $\mathsf{c} : (\mathsf{a} \to \mathsf{a}) \to \mathsf{a} \quad \mathsf{d} : \mathsf{a} \quad \mathsf{f}, \mathsf{g} : \mathsf{a} \to \mathsf{a} \quad \mathsf{h} : \mathsf{a} \to \mathsf{b}$
- $x : \mathsf{a} \quad Z : \mathsf{a} \to \mathsf{a}$
- local peak $\mathsf{c}(y.\mathsf{f}(y)) \leftarrow \mathsf{c}(y.\mathsf{f}(\mathsf{g}(y))) \to \mathsf{f}(\mathsf{d})$ is not joinable

Challenge

how to define critical pairs ?

Example

DPRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{f}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{f}(x) \qquad \mathsf{h}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{h}(x) \qquad \mathsf{c}(y.Z(\mathsf{g}(y))) \to Z(\mathsf{d}) \qquad \mathsf{c}(y.\mathsf{f}(y)) \to \mathsf{f}(\mathsf{d})$$

- $\mathsf{c} : (\mathsf{a} \to \mathsf{a}) \to \mathsf{a} \quad \mathsf{d} : \mathsf{a} \quad \mathsf{f}, \mathsf{g} : \mathsf{a} \to \mathsf{a} \quad \mathsf{h} : \mathsf{a} \to \mathsf{b}$
- $x : \mathsf{a} \quad Z : \mathsf{a} \to \mathsf{a}$
- local peak $\mathsf{c}(y.\mathsf{f}(y)) \leftarrow \mathsf{c}(y.\mathsf{f}(\mathsf{g}(y))) \to \mathsf{f}(\mathsf{d})$ is joinable

Challenge

how to define critical pairs ?

Example

DPRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{f}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{f}(x) \qquad \mathsf{h}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{h}(x) \qquad \mathsf{c}(y.Z(\mathsf{g}(y))) \to Z(\mathsf{d}) \qquad \mathsf{c}(y.\mathsf{f}(y)) \to \mathsf{f}(\mathsf{d})$$

- $\mathsf{c} : (\mathsf{a} \to \mathsf{a}) \to \mathsf{a} \quad \mathsf{d} : \mathsf{a} \quad \mathsf{f}, \mathsf{g} : \mathsf{a} \to \mathsf{a} \quad \mathsf{h} : \mathsf{a} \to \mathsf{b}$
- $x : \mathsf{a} \quad Z : \mathsf{a} \to \mathsf{a}$
- local peak $\mathsf{c}(y.\mathsf{f}(y)) \leftarrow \mathsf{c}(y.\mathsf{f}(\mathsf{g}(y))) \to \mathsf{f}(\mathsf{d})$ is joinable
- $\mathcal{R}$ is not locally confluent

Challenge

how to define critical pairs ?

Example

DPRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{f}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{f}(x) \qquad \mathsf{h}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{h}(x) \qquad \mathsf{c}(y.Z(\mathsf{g}(y))) \to Z(\mathsf{d}) \qquad \mathsf{c}(y.\mathsf{f}(y)) \to \mathsf{f}(\mathsf{d})$$

- $\mathsf{c} : (\mathsf{a} \to \mathsf{a}) \to \mathsf{a} \quad \mathsf{d} : \mathsf{a} \quad \mathsf{f}, \mathsf{g} : \mathsf{a} \to \mathsf{a} \quad \mathsf{h} : \mathsf{a} \to \mathsf{b}$
- $x : \mathsf{a} \quad Z : \mathsf{a} \to \mathsf{a}$
- local peak $\mathsf{c}(y.\mathsf{f}(y)) \leftarrow \mathsf{c}(y.\mathsf{f}(\mathsf{g}(y))) \to \mathsf{f}(\mathsf{d})$ is joinable
- $\mathcal{R}$ is not locally confluent
- local peak $\mathsf{c}(y.\mathsf{f}(\mathsf{f}(y))) \leftarrow \mathsf{c}(y.\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(y)))) \to \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{d}))$ is not joinable

Challenge

how to define critical pairs ?

Example

DPRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{f}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{f}(x) \qquad \mathsf{h}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{h}(x) \qquad \mathsf{c}(y.Z(\mathsf{g}(y))) \to Z(\mathsf{d}) \qquad \mathsf{c}(y.\mathsf{f}(y)) \to \mathsf{f}(\mathsf{d})$$

- $\mathsf{c} : (\mathsf{a} \to \mathsf{a}) \to \mathsf{a} \quad \mathsf{d} : \mathsf{a} \quad \mathsf{f}, \mathsf{g} : \mathsf{a} \to \mathsf{a} \quad \mathsf{h} : \mathsf{a} \to \mathsf{b}$
- $x : \mathsf{a} \quad Z : \mathsf{a} \to \mathsf{a}$
- local peak $\mathsf{c}(y.\mathsf{f}(y)) \leftarrow \mathsf{c}(y.\mathsf{f}(\mathsf{g}(y))) \to \mathsf{f}(\mathsf{d})$ is joinable
- $\mathcal{R}$ is not locally confluent, contradicting local confluence result of Hamana (JFP 2019)
- local peak $\mathsf{c}(y.\mathsf{f}(\mathsf{f}(y))) \leftarrow \mathsf{c}(y.\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(y)))) \to \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{d}))$ is not joinable

Challenge

how to define critical pairs ?

Example

DPRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{f}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{f}(x) \qquad \mathsf{h}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{h}(x) \qquad \mathsf{c}(y.Z(\mathsf{g}(y))) \to Z(\mathsf{d}) \qquad \mathsf{c}(y.\mathsf{f}(y)) \to \mathsf{f}(\mathsf{d})$$

- $\mathsf{c} : (\mathsf{a} \to \mathsf{a}) \to \mathsf{a} \quad \mathsf{d} : \mathsf{a} \quad \mathsf{f}, \mathsf{g} : \mathsf{a} \to \mathsf{a} \quad \mathsf{h} : \mathsf{a} \to \mathsf{b} \quad \mathsf{e} : \mathsf{b} \to \mathsf{a}$
- $x : \mathsf{a} \quad Z : \mathsf{a} \to \mathsf{a}$
- local peak $\mathsf{c}(y.\mathsf{f}(y)) \leftarrow \mathsf{c}(y.\mathsf{f}(\mathsf{g}(y))) \to \mathsf{f}(\mathsf{d})$ is joinable
- $\mathcal{R}$ is not locally confluent, contradicting local confluence result of Hamana (JFP 2019)
- local peak $\mathsf{c}(y.\mathsf{f}(\mathsf{f}(y))) \leftarrow \mathsf{c}(y.\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(y)))) \to \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{d}))$ is not joinable
- local peak $\mathsf{c}(y.\mathsf{e}(\mathsf{h}(y))) \leftarrow \mathsf{c}(y.\mathsf{e}(\mathsf{h}(\mathsf{g}(y)))) \to \mathsf{e}(\mathsf{h}(\mathsf{d}))$ is not joinable

Challenge

how to define critical pairs ?

Example

DPRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{f}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{f}(x) \qquad \mathsf{h}(\mathsf{g}(x)) \to \mathsf{h}(x) \qquad \mathsf{c}(y.Z(\mathsf{g}(y))) \to Z(\mathsf{d}) \qquad \mathsf{c}(y.\mathsf{f}(y)) \to \mathsf{f}(\mathsf{d})$$

- $\mathsf{c} : (\mathsf{a} \to \mathsf{a}) \to \mathsf{a} \quad \mathsf{d} : \mathsf{a} \quad \mathsf{f}, \mathsf{g} : \mathsf{a} \to \mathsf{a} \quad \mathsf{h} : \mathsf{a} \to \mathsf{b} \quad \mathsf{e} : \mathsf{b} \to \mathsf{a}$
- $x : \mathsf{a} \quad Z : \mathsf{a} \to \mathsf{a} \quad F : (\mathsf{a}, \mathsf{a}) \to \mathsf{a}$
- local peak $\mathsf{c}(y.\mathsf{f}(y)) \leftarrow \mathsf{c}(y.\mathsf{f}(\mathsf{g}(y))) \to \mathsf{f}(\mathsf{d})$ is joinable
- $\mathcal{R}$ is not locally confluent, contradicting local confluence result of Hamana (JFP 2019)
- local peak $\mathsf{c}(y.\mathsf{f}(\mathsf{f}(y))) \leftarrow \mathsf{c}(y.\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{g}(y)))) \to \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{d}))$ is not joinable
- local peak $\mathsf{c}(y.\mathsf{e}(\mathsf{h}(y))) \leftarrow \mathsf{c}(y.\mathsf{e}(\mathsf{h}(\mathsf{g}(y)))) \to \mathsf{e}(\mathsf{h}(\mathsf{d}))$ is not joinable
- local peak $\mathsf{c}(y.F(\mathsf{f}(y), \mathsf{g}(y))) \leftarrow \mathsf{c}(y.F(\mathsf{f}(\mathsf{g}(y)), \mathsf{g}(y))) \to F(\mathsf{f}(\mathsf{d}), \mathsf{d})$ is not joinable

Challenge

how to define critical pairs ?

Definition

overlap of DPRS $\mathcal{R}$ is octuple $\langle \ell_1 \to r_1, p, q, \overline{x_n}, \delta, \gamma, U, \ell_2 \to r_2 \rangle$

Definition

overlap of DPRS $\mathcal{R}$ is octuple $\langle \ell_1 \to r_1, p, q, \overline{x_n}, \delta, \gamma, U, \ell_2 \to r_2 \rangle$ such that

① $\ell_1 \to r_1,\ \ell_2 \to r_2 \in \mathcal{R}$

Definition

overlap of DPRS $\mathcal{R}$ is octuple $\langle \ell_1 \to r_1, p, q, \overline{x_n}, \delta, \gamma, U, \ell_2 \to r_2 \rangle$ such that

① $\ell_1 \to r_1, \ell_2 \to r_2 \in \mathcal{R}$ and $p \in \mathcal{P}os(\ell_2)$

Definition

overlap of DPRS $\mathcal{R}$ is octuple $\langle \ell_1 \to r_1, p, q, \overline{x_n}, \delta, \gamma, U, \ell_2 \to r_2 \rangle$ such that

① $\ell_1 \to r_1, \ell_2 \to r_2 \in \mathcal{R}$ and $p \in \mathcal{P}\mathrm{os}(\ell_2)$

② if $p = \epsilon$ then $\ell_1 \to r_1$ and $\ell_2 \to r_2$ are not variants

Definition

overlap of DPRS $\mathcal{R}$ is octuple $\langle \ell_1 \to r_1,\ p,\ q,\ \overline{x_n},\ \delta,\ \gamma,\ U,\ \ell_2 \to r_2 \rangle$ such that

① $\ell_1 \to r_1,\ \ell_2 \to r_2 \in \mathcal{R}$ and $p \in \mathcal{P}\mathrm{os}(\ell_2)$

② if $p = \epsilon$ then $\ell_1 \to r_1$ and $\ell_2 \to r_2$ are not variants

③ $\mathrm{BV}(\ell_2, p) = \overline{x_n}$ and δ is $\overline{x_n}$–lifter of ℓ_1 away from $\mathrm{FV}(\ell_2)$

Definition

overlap of DPRS $\mathcal{R}$ is octuple $\langle \ell_1 \to r_1,\, p,\, q,\, \overline{x_n},\, \delta,\, \gamma,\, U,\, \ell_2 \to r_2 \rangle$ such that

① $\ell_1 \to r_1,\, \ell_2 \to r_2 \in \mathcal{R}$ and $p \in \mathcal{P}\mathrm{os}(\ell_2)$

② if $p = \epsilon$ then $\ell_1 \to r_1$ and $\ell_2 \to r_2$ are not variants

③ $\mathrm{BV}(\ell_2, p) = \overline{x_n}$ and δ is $\overline{x_n}$–lifter of ℓ_1 away from $\mathrm{FV}(\ell_2)$

④ U' is minimal complete set of unifiers of $\overline{x_n}.\ell_1\delta$ and $\ell_2\gamma|_{pq}$

Definition

overlap of DPRS $\mathcal{R}$ is octuple $\langle \ell_1 \to r_1,\, p,\, q,\, \overline{x_n},\, \delta,\, \gamma,\, U,\, \ell_2 \to r_2 \rangle$ such that

① $\ell_1 \to r_1,\, \ell_2 \to r_2 \in \mathcal{R}$ and $p \in \mathcal{P}\mathrm{os}(\ell_2)$

② if $p = \epsilon$ then $\ell_1 \to r_1$ and $\ell_2 \to r_2$ are not variants

③ $\mathrm{BV}(\ell_2, p) = \overline{x_n}$ and δ is $\overline{x_n}$–lifter of ℓ_1 away from $\mathrm{FV}(\ell_2)$

④ U' is minimal complete set of unifiers of $\overline{x_n}.\ell_1\delta$ and $\ell_2\gamma|_{pq}$

⑤ either $p \in \mathcal{P}\mathrm{os}_{\mathcal{F}}(\ell_2)$, $q = \epsilon$, $\gamma = \epsilon$, $U = U'$

Definition

overlap of DPRS $\mathcal{R}$ is octuple $\langle \ell_1 \to r_1,\, p,\, q,\, \overline{x_n},\, \delta,\, \gamma,\, U,\, \ell_2 \to r_2 \rangle$ such that

① $\ell_1 \to r_1,\, \ell_2 \to r_2 \in \mathcal{R}$ and $p \in \mathcal{P}\mathrm{os}(\ell_2)$

② if $p = \epsilon$ then $\ell_1 \to r_1$ and $\ell_2 \to r_2$ are not variants

③ $\mathrm{BV}(\ell_2, p) = \overline{x_n}$ and δ is $\overline{x_n}$–lifter of ℓ_1 away from $\mathrm{FV}(\ell_2)$

④ U' is minimal complete set of unifiers of $\overline{x_n}.\ell_1\delta$ and $\ell_2\gamma|_{pq}$

⑤ either $p \in \mathcal{P}\mathrm{os}_{\mathcal{F}}(\ell_2)$, $q = \epsilon$, $\gamma = \epsilon$, $U = U'$ or $q = 1$ and

- $\ell_2|_p = \overline{x_n}.y(\overline{s_m})$ where $y \notin \{\overline{x_n}\}$ and $\{\overline{s_m}\} \nsubseteq \{\overline{x_n}\!\uparrow\}$
- $\gamma = \{y \mapsto \overline{y_m}.y''(y'(\overline{y_m}\!\uparrow), \overline{y_m}\!\uparrow)\}$ where $y' : \overline{\sigma_m} \to b$ and $y'' : (b, \overline{\sigma_m}) \to a$ are fresh variables with $y : \overline{\sigma_m} \to a$ and $\ell_1 : b$
- $U = U' \setminus U''$ such that for all $\theta \in U'' \subseteq U$

① if $\theta(y') = \overline{y_m}.v$ and $y_i \in \mathrm{FV}(v)$ then $s_i \in \{\overline{x_n}\!\uparrow\}$ or ② $(\overline{x_n}.y'(\overline{s_m}))\theta \in \{\overline{x_n}.s_i \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$

Definition

- critical peak for overlap $\langle \ell_1 \to r_1, p, q, \overline{x_n}, \delta, \gamma, U, \ell_2 \to r_2 \rangle$ and $\theta \in U$

$$\ell_2\gamma\theta[(\overline{x_n}.r_1\delta)\theta]_{pq} \leftarrow \ell_2\gamma\theta[(\overline{x_n}.\ell_1\delta)\theta]_{pq} = \ell_2\gamma\theta \to r_2\gamma\theta$$

Definition

- critical peak for overlap $\langle \ell_1 \to r_1,\, p,\, q,\, \overline{x_n},\, \delta,\, \gamma,\, U,\, \ell_2 \to r_2 \rangle$ and $\theta \in U$

$$\ell_2\gamma\theta[(\overline{x_n}.r_1\delta)\theta]_{pq} \leftarrow \ell_2\gamma\theta[(\overline{x_n}.\ell_1\delta)\theta]_{pq} = \ell_2\gamma\theta \to r_2\gamma\theta$$

with critical pair

$$\ell_2\gamma\theta[(\overline{x_n}.r_1\delta)\theta]_{pq} \approx r_2\gamma\theta$$

Definition

- critical peak for overlap $\langle \ell_1 \to r_1, p, q, \overline{x_n}, \delta, \gamma, U, \ell_2 \to r_2 \rangle$ and $\theta \in U$

$$\ell_2\gamma\theta[(\overline{x_n}.r_1\delta)\theta]_{pq} \leftarrow \ell_2\gamma\theta[(\overline{x_n}.\ell_1\delta)\theta]_{pq} = \ell_2\gamma\theta \to r_2\gamma\theta$$

with critical pair

$$\ell_2\gamma\theta[(\overline{x_n}.r_1\delta)\theta]_{pq} \approx r_2\gamma\theta$$

- $\mathrm{CP}(\mathcal{R})$ denotes set of critical pairs of DPRS $\mathcal{R}$

Example

DPRS $\mathcal{R}$

$$
\begin{array}{rclrclrcl}
\mathsf{repl}(y.F(\neg y), x) & \to & F(x \Rightarrow \bot) & \neg\neg x & \to & x & \neg(x \Rightarrow \bot) & \to & x \\
\mathsf{repl}(y.F(y), x) & \to & F(x) & \neg x & \to & x \Rightarrow \bot & (x \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot & \to & x
\end{array}
$$

- $\bot : \mathsf{prop} \quad \neg : \mathsf{prop} \to \mathsf{prop} \quad \Rightarrow : (\mathsf{prop}, \mathsf{prop}) \to \mathsf{prop}$
- $\mathsf{repl} : (\mathsf{prop} \to \mathsf{prop}, \mathsf{prop}) \to \mathsf{prop} \quad x : \mathsf{prop} \quad F : \mathsf{prop} \to \mathsf{prop}$

Example

DPRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{repl}(y.F(\neg y),x) \to F(x \Rightarrow \bot) \qquad \neg\neg x \to x \qquad \neg(x \Rightarrow \bot) \to x$$

$$\mathsf{repl}(y.F(y),x) \to F(x) \qquad \neg x \to x \Rightarrow \bot \qquad (x \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot \to x$$

- $\bot : \mathsf{prop} \quad \neg : \mathsf{prop} \to \mathsf{prop} \quad \Rightarrow : (\mathsf{prop}, \mathsf{prop}) \to \mathsf{prop}$
- $\mathsf{repl} : (\mathsf{prop} \to \mathsf{prop}, \mathsf{prop}) \to \mathsf{prop} \quad x : \mathsf{prop} \quad F : \mathsf{prop} \to \mathsf{prop}$
- critical pairs (modulo symmetry)

$$\neg x \approx \neg x \qquad x \Rightarrow \bot \approx \neg x$$

$$\neg x \Rightarrow \bot \approx x \qquad \neg(x \Rightarrow \bot) \approx x$$

$$x \Rightarrow \bot \approx x \Rightarrow \bot \qquad (x \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot \approx x$$

Example

DPRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{repl}(y.F(\neg y), x) \to F(x \Rightarrow \bot) \qquad \neg\neg x \to x \qquad \neg(x \Rightarrow \bot) \to x$$

$$\mathsf{repl}(y.F(y), x) \to F(x) \qquad \neg x \to x \Rightarrow \bot \qquad (x \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot \to x$$

- $\bot : \mathsf{prop} \quad \neg : \mathsf{prop} \to \mathsf{prop} \quad \Rightarrow : (\mathsf{prop}, \mathsf{prop}) \to \mathsf{prop}$
- $\mathsf{repl} : (\mathsf{prop} \to \mathsf{prop}, \mathsf{prop}) \to \mathsf{prop} \quad x : \mathsf{prop} \quad F : \mathsf{prop} \to \mathsf{prop}$
- critical pairs (modulo symmetry)

$$\neg x \approx \neg x \qquad x \Rightarrow \bot \approx \neg x \qquad H_1(x \Rightarrow \bot) \approx H_1(\neg x)$$

$$\neg x \Rightarrow \bot \approx x \qquad \neg(x \Rightarrow \bot) \approx x$$

$$x \Rightarrow \bot \approx x \Rightarrow \bot \qquad (x \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot \approx x$$

with $H_1 : \mathsf{prop} \to \mathsf{prop}$

Example

DPRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{repl}(y.F(\neg y),x) \to F(x \Rightarrow \bot) \qquad \neg\neg x \to x \qquad \neg(x \Rightarrow \bot) \to x$$

$$\mathsf{repl}(y.F(y),x) \to F(x) \qquad \neg x \to x \Rightarrow \bot \qquad (x \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot \to x$$

- $\bot : \mathsf{prop} \quad \neg : \mathsf{prop} \to \mathsf{prop} \quad \Rightarrow : (\mathsf{prop}, \mathsf{prop}) \to \mathsf{prop}$
- $\mathsf{repl} : (\mathsf{prop} \to \mathsf{prop}, \mathsf{prop}) \to \mathsf{prop} \quad x : \mathsf{prop} \quad F : \mathsf{prop} \to \mathsf{prop}$
- critical pairs (modulo symmetry)

$$\neg x \approx \neg x \qquad x \Rightarrow \bot \approx \neg x \qquad H_1(x \Rightarrow \bot) \approx H_1(\neg x)$$

$$\neg x \Rightarrow \bot \approx x \qquad \neg(x \Rightarrow \bot) \approx x \qquad \mathsf{repl}(y.G(y,\neg y),x) \approx G(\neg(x \Rightarrow \bot), x \Rightarrow \bot)$$

$$x \Rightarrow \bot \approx x \Rightarrow \bot \qquad (x \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot \approx x$$

with $H_1 : \mathsf{prop} \to \mathsf{prop}$, $G : (\mathsf{prop}, \mathsf{prop}) \to \mathsf{prop}$

Example

DPRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{repl}(y.F(\neg y), x) \to F(x \Rightarrow \bot) \qquad \neg\neg x \to x \qquad \neg(x \Rightarrow \bot) \to x$$

$$\mathsf{repl}(y.F(y), x) \to F(x) \qquad \neg x \to x \Rightarrow \bot \qquad (x \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot \to x$$

- $\bot : \mathsf{prop} \quad \neg : \mathsf{prop} \to \mathsf{prop} \quad \Rightarrow : (\mathsf{prop}, \mathsf{prop}) \to \mathsf{prop}$
- $\mathsf{repl} : (\mathsf{prop} \to \mathsf{prop}, \mathsf{prop}) \to \mathsf{prop} \quad x : \mathsf{prop} \quad F : \mathsf{prop} \to \mathsf{prop}$
- critical pairs (modulo symmetry)

$$\neg x \approx \neg x \qquad x \Rightarrow \bot \approx \neg x \qquad H_1(x \Rightarrow \bot) \approx H_1(\neg x)$$

$$\neg x \Rightarrow \bot \approx x \qquad \neg(x \Rightarrow \bot) \approx x \qquad \mathsf{repl}(y.G(y, \neg y), x) \approx G(\neg(x \Rightarrow \bot), x \Rightarrow \bot)$$

$$x \Rightarrow \bot \approx x \Rightarrow \bot \qquad (x \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot \approx x \qquad \mathsf{repl}(y.F(y \Rightarrow \bot), x) \approx F(x \Rightarrow \bot)$$

with $H_1 : \mathsf{prop} \to \mathsf{prop}$, $G : (\mathsf{prop}, \mathsf{prop}) \to \mathsf{prop}$

Example

DPRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{repl}(y.F(\neg y), x) \to F(x \Rightarrow \bot) \qquad \neg\neg x \to x \qquad \neg(x \Rightarrow \bot) \to x$$

$$\mathsf{repl}(y.F(y), x) \to F(x) \qquad \neg x \to x \Rightarrow \bot \qquad (x \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot \to x$$

- $\bot : \mathsf{prop} \quad \neg : \mathsf{prop} \to \mathsf{prop} \quad \Rightarrow : (\mathsf{prop}, \mathsf{prop}) \to \mathsf{prop}$
- $\mathsf{repl} : (\mathsf{prop} \to \mathsf{prop}, \mathsf{prop}) \to \mathsf{prop} \quad x : \mathsf{prop} \quad F : \mathsf{prop} \to \mathsf{prop}$
- critical pairs (modulo symmetry)

$$\neg x \approx \neg x \qquad x \Rightarrow \bot \approx \neg x \qquad H_1(x \Rightarrow \bot) \approx H_1(\neg x)$$

$$\neg x \Rightarrow \bot \approx x \qquad \neg(x \Rightarrow \bot) \approx x \qquad \mathsf{repl}(y.G(y, \neg y), x) \approx G(\neg(x \Rightarrow \bot), x \Rightarrow \bot)$$

$$x \Rightarrow \bot \approx x \Rightarrow \bot \qquad (x \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot \approx x \qquad \mathsf{repl}(y.F(y \Rightarrow \bot), x) \approx F(x \Rightarrow \bot)$$

$$\mathsf{repl}(y.G(H_2(\neg y, H_1(\neg y) \Rightarrow \bot), \neg y), x) \approx G(\mathsf{repl}(z.H_2(x \Rightarrow \bot, \neg z), H_1(x \Rightarrow \bot)), x \Rightarrow \bot)$$

with $H_1 : \mathsf{prop} \to \mathsf{prop}$, $G : (\mathsf{prop}, \mathsf{prop}) \to \mathsf{prop}$ and $H_2 : (\mathsf{prop}, \mathsf{prop}) \to \mathsf{prop}$

Example

DPRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{repl}(y.F(\neg y),x) \to F(x \Rightarrow \bot) \qquad \neg\neg x \to x \qquad \neg(x \Rightarrow \bot) \to x$$
$$\mathsf{repl}(y.F(y),x) \to F(x) \qquad \neg x \to x \Rightarrow \bot \qquad (x \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot \to x$$

- $\bot : \mathsf{prop} \quad \neg : \mathsf{prop} \to \mathsf{prop} \quad \Rightarrow : (\mathsf{prop}, \mathsf{prop}) \to \mathsf{prop}$
- $\mathsf{repl} : (\mathsf{prop} \to \mathsf{prop}, \mathsf{prop}) \to \mathsf{prop} \quad x : \mathsf{prop} \quad F : \mathsf{prop} \to \mathsf{prop}$
- critical pairs (modulo symmetry)

$$\neg x \approx \neg x \qquad x \Rightarrow \bot \approx \neg x \qquad H_1(x \Rightarrow \bot) \approx H_1(\neg x)$$
$$\neg x \Rightarrow \bot \approx x \qquad \neg(x \Rightarrow \bot) \approx x \qquad \mathsf{repl}(y.G(y,\neg y),x) \approx G(\neg(x \Rightarrow \bot), x \Rightarrow \bot)$$
$$x \Rightarrow \bot \approx x \Rightarrow \bot \qquad (x \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot \approx x \qquad \mathsf{repl}(y.F(y \Rightarrow \bot),x) \approx F(x \Rightarrow \bot)$$
$$\mathsf{repl}(y.G(H_2(\neg y, H_1(\neg y) \Rightarrow \bot), \neg y), x) \approx G(\mathsf{repl}(z.H_2(x \Rightarrow \bot, \neg z), H_1(x \Rightarrow \bot)), x \Rightarrow \bot)$$
$$\mathsf{repl}(y.G(H_2(\neg y, H_1(\neg y)), \neg y), x) \approx G(\mathsf{repl}(z.H_2(x \Rightarrow \bot, z), H_1(x \Rightarrow \bot)), x \Rightarrow \bot)$$

with $H_1 : \mathsf{prop} \to \mathsf{prop}$, $G : (\mathsf{prop}, \mathsf{prop}) \to \mathsf{prop}$ and $H_2 : (\mathsf{prop}, \mathsf{prop}) \to \mathsf{prop}$

Critical Pair Lemma

if $t \;{}_{\mathcal{R}}\!\leftarrow \cdot \rightarrow_{\mathcal{R}} u$ then $t \downarrow_{\mathcal{R}} u$ or $t \rightarrow^*_{\mathcal{R}} \cdot \leftrightarrow_{\mathsf{CP}(\mathcal{R})} \cdot {}^{\;*}_{\mathcal{R}}\!\leftarrow u$

Critical Pair Lemma

if $t \;{}_{\mathcal{R}}\!\leftarrow \cdot \rightarrow_{\mathcal{R}} u$ then $t \downarrow_{\mathcal{R}} u$ or $t \rightarrow^*_{\mathcal{R}} \cdot \leftrightarrow_{\mathsf{CP}(\mathcal{R})} \cdot {}_{\mathcal{R}}^{*}\!\leftarrow u$

Critical Pair Lemma

if $t \;{}_{\mathcal{R}}\!\leftarrow \cdot \rightarrow_{\mathcal{R}} u$ then $t \downarrow_{\mathcal{R}} u$ or $t \rightarrow^*_{\mathcal{R}} \cdot \leftrightarrow_{\mathsf{CP}(\mathcal{R})} \cdot {}^{*}_{\mathcal{R}}\!\leftarrow u$

Example

DPRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{f}(x) \to x \qquad\qquad \mathsf{c}(y.Z(\mathsf{f}(y))) \to Z(\mathsf{d})$$

- $\mathsf{c} : (\mathsf{a} \to \mathsf{a}) \to \mathsf{a} \quad \mathsf{d} : \mathsf{a} \quad \mathsf{f} : \mathsf{a} \to \mathsf{a}$
- $x : a \quad Z : a \to a$

Critical Pair Lemma

if $t\ {}_{\mathcal{R}}\!\leftarrow \cdot \rightarrow_{\mathcal{R}} u$ then $t \downarrow_{\mathcal{R}} u$ or $t \rightarrow^*_{\mathcal{R}} \cdot \leftrightarrow_{\mathsf{CP}(\mathcal{R})} \cdot {}^*_{\mathcal{R}}\!\leftarrow u$

Example

DPRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{f}(x) \rightarrow x \qquad\qquad \mathsf{c}(y.Z(\mathsf{f}(y))) \rightarrow Z(\mathsf{d})$$

- $\mathsf{c} : (\mathsf{a} \rightarrow \mathsf{a}) \rightarrow \mathsf{a} \quad \mathsf{d} : \mathsf{a} \quad \mathsf{f} : \mathsf{a} \rightarrow \mathsf{a} \quad \mathsf{g} : (\mathsf{a}, \mathsf{a}) \rightarrow \mathsf{a}$
- $x : a \quad Z : a \rightarrow a$
- non-joinable local peak $\mathsf{c}(y.\mathsf{g}(y, \mathsf{f}(y))) \leftarrow \mathsf{c}(y.\mathsf{g}(\mathsf{f}(y), \mathsf{f}(y))) \rightarrow \mathsf{g}(\mathsf{d}, \mathsf{d})$

Critical Pair Lemma

if $t \; {}_{\mathcal{R}}\!\leftarrow \cdot \rightarrow_{\mathcal{R}} u$ then $t \downarrow_{\mathcal{R}} u$ or $t \rightarrow^{*}_{\mathcal{R}} \cdot \leftrightarrow_{\mathsf{CP}(\mathcal{R})} \cdot {}^{*}_{\mathcal{R}}\!\leftarrow u$

Example

DPRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{f}(x) \rightarrow x \qquad\qquad \mathsf{c}(y.Z(\mathsf{f}(y))) \rightarrow Z(\mathsf{d})$$

- $\mathsf{c} : (\mathsf{a} \rightarrow \mathsf{a}) \rightarrow \mathsf{a} \quad \mathsf{d} : \mathsf{a} \quad \mathsf{f} : \mathsf{a} \rightarrow \mathsf{a} \quad \mathsf{g} : (\mathsf{a}, \mathsf{a}) \rightarrow \mathsf{a}$
- $x : a \quad Z : a \rightarrow a$
- non-joinable local peak $\mathsf{c}(y.\mathsf{g}(y, \mathsf{f}(y))) \leftarrow \mathsf{c}(y.\mathsf{g}(\mathsf{f}(y), \mathsf{f}(y))) \rightarrow \mathsf{g}(\mathsf{d}, \mathsf{d})$
- corresponding critical pair $\mathsf{c}(y.Z(y)) \approx Z(\mathsf{d})$

Critical Pair Lemma

if $t \;{}_{\mathcal{R}}\!\leftarrow \cdot \rightarrow_{\mathcal{R}} u$ then $t \downarrow_{\mathcal{R}} u$ or $t \rightarrow^{*}_{\mathcal{R}} \cdot \leftrightarrow_{\mathrm{CP}(\mathcal{R})} \cdot {}^{*}_{\mathcal{R}}\!\leftarrow u$

Example

DPRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{f}(x) \to x \qquad\qquad \mathsf{c}(y.Z(\mathsf{f}(y))) \to Z(\mathsf{d})$$

- $\mathsf{c} : (\mathsf{a} \to \mathsf{a}) \to \mathsf{a} \quad \mathsf{d} : \mathsf{a} \quad \mathsf{f} : \mathsf{a} \to \mathsf{a} \quad \mathsf{g} : (\mathsf{a}, \mathsf{a}) \to \mathsf{a}$
- $x : a \quad Z : a \to a$
- non-joinable local peak $\mathsf{c}(y.\mathsf{g}(y, \mathsf{f}(y))) \leftarrow \mathsf{c}(y.\mathsf{g}(\mathsf{f}(y), \mathsf{f}(y))) \to \mathsf{g}(\mathsf{d}, \mathsf{d})$
- corresponding critical pair $\mathsf{c}(y.Z(y)) \approx Z(\mathsf{d})$
- $\mathsf{c}(y.\mathsf{g}(y, \mathsf{f}(y))) \to_{\mathcal{R}} \mathsf{c}(y.\mathsf{g}(y, y)) \leftrightarrow_{\mathrm{CP}(\mathcal{R})} \mathsf{g}(\mathsf{d}, \mathsf{d})$

Corollary

terminating DPRS $\mathcal{R}$ is confluent if all its critical pairs are joinable

Corollary

terminating DPRS $\mathcal{R}$ is confluent if all its critical pairs are joinable

Example (cont'd)

DPRS $\mathcal{R}$

$$\begin{array}{lll} \mathsf{repl}(y.F(\neg y),x) \to F(x \Rightarrow \bot) & \neg\neg x \to x & \neg(x \Rightarrow \bot) \to x \\ \mathsf{repl}(y.F(y),x) \to F(x) & \neg x \to x \Rightarrow \bot & (x \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot \to x \end{array}$$

- all critical pairs are joinable

Corollary

terminating DPRS $\mathcal{R}$ is confluent if all its critical pairs are joinable

Example (cont'd)

DPRS $\mathcal{R}$

$$\begin{array}{lll} \mathsf{repl}(y.F(\neg y), x) \to F(x \Rightarrow \bot) & \neg\neg x \to x & \neg(x \Rightarrow \bot) \to x \\ \mathsf{repl}(y.F(y), x) \to F(x) & \neg x \to x \Rightarrow \bot & (x \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot \to x \end{array}$$

- all critical pairs are joinable
- polynomial interpretation (van de Pol 1996)

$$\mathsf{repl}_{\mathbb{N}}(Y, x) = Y(x) + x + 1 \qquad \neg_{\mathbb{N}}(x) = x + 2 \qquad \Rightarrow_{\mathbb{N}}(x, y) = x + y + 1 \qquad \bot_{\mathbb{N}} = 0$$

Corollary

terminating DPRS $\mathcal{R}$ is confluent if all its critical pairs are joinable

Example (cont'd)

DPRS $\mathcal{R}$

$$\begin{aligned} &\mathsf{repl}(y.F(\neg y),x) \to F(x \Rightarrow \bot) && \neg\neg x \to x && \neg(x \Rightarrow \bot) \to x \\ &\mathsf{repl}(y.F(y),x) \to F(x) && \neg x \to x \Rightarrow \bot && (x \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot \to x \end{aligned}$$

- all critical pairs are joinable
- polynomial interpretation (van de Pol 1996)

$$\mathsf{repl}_{\mathbb{N}}(Y,x) = Y(x) + x + 1 \qquad \neg_{\mathbb{N}}(x) = x + 2 \qquad \Rightarrow_{\mathbb{N}}(x,y) = x + y + 1 \qquad \bot_{\mathbb{N}} = 0$$

$$[\![\mathsf{repl}(y.F(\neg y),x)]\!] = [\![F]\!]([\![x]\!] + 2) + [\![x]\!] + 1 > [\![F]\!]([\![x]\!] + 1) = [\![F(x \Rightarrow \bot)]\!]$$

Corollary

terminating DPRS $\mathcal{R}$ is confluent if all its critical pairs are joinable

Example (cont'd)

DPRS $\mathcal{R}$

$$\mathsf{repl}(y.F(\neg y), x) \to F(x \Rightarrow \bot) \qquad \neg\neg x \to x \qquad \neg(x \Rightarrow \bot) \to x$$

$$\mathsf{repl}(y.F(y), x) \to F(x) \qquad \neg x \to x \Rightarrow \bot \qquad (x \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot \to x$$

- all critical pairs are joinable
- polynomial interpretation (van de Pol 1996)

$$\mathsf{repl}_{\mathbb{N}}(Y, x) = Y(x) + x + 1 \qquad \neg_{\mathbb{N}}(x) = x + 2 \qquad \Rightarrow_{\mathbb{N}}(x, y) = x + y + 1 \qquad \bot_{\mathbb{N}} = 0$$

$$[\![\mathsf{repl}(y.F(\neg y), x)]\!] = [\![F]\!]([\![x]\!] + 2) + [\![x]\!] + 1 > [\![F]\!]([\![x]\!] + 1) = [\![F(x \Rightarrow \bot)]\!]$$

$$[\![\mathsf{repl}(y.F(y), x)]\!] = [\![F]\!]([\![x]\!]) + [\![x]\!] + 1 > [\![F]\!]([\![x]\!]) = [\![F(x)]\!]$$

Corollary

terminating DPRS $\mathcal{R}$ is confluent if all its critical pairs are joinable

Example (cont'd)

DPRS $\mathcal{R}$

$$\begin{array}{lll} \mathsf{repl}(y.F(\neg y), x) \to F(x \Rightarrow \bot) & \neg\neg x \to x & \neg(x \Rightarrow \bot) \to x \\ \mathsf{repl}(y.F(y), x) \to F(x) & \neg x \to x \Rightarrow \bot & (x \Rightarrow \bot) \Rightarrow \bot \to x \end{array}$$

- all critical pairs are joinable
- polynomial interpretation (van de Pol 1996)

$$\mathsf{repl}_{\mathbb{N}}(Y, x) = Y(x) + x + 1 \qquad \neg_{\mathbb{N}}(x) = x + 2 \qquad \Rightarrow_{\mathbb{N}}(x, y) = x + y + 1 \qquad \bot_{\mathbb{N}} = 0$$

$$[\![\mathsf{repl}(y.F(\neg y), x)]\!] = [\![F]\!]([\![x]\!] + 2) + [\![x]\!] + 1 > [\![F]\!]([\![x]\!] + 1) = [\![F(x \Rightarrow \bot)]\!]$$

$$[\![\mathsf{repl}(y.F(y), x)]\!] = [\![F]\!]([\![x]\!]) + [\![x]\!] + 1 > [\![F]\!]([\![x]\!]) = [\![F(x)]\!]$$

$$\cdots$$

Outline

Contribution

- critical pair lemma for deterministic higher−order pattern rewrite systems

Contribution

- critical pair lemma for deterministic higher−order pattern rewrite systems

Future Work

- investigate unification problem for deterministic higher−order patterns

Contribution

- critical pair lemma for deterministic higher−order pattern rewrite systems

Future Work

- investigate unification problem for deterministic higher−order patterns
- completion for higher−order rewriting

Contribution

- critical pair lemma for deterministic higher−order pattern rewrite systems

Future Work

- investigate unification problem for deterministic higher−order patterns
- completion for higher−order rewriting
- formalization of higher−order confluence methods